I&R Opg. 2.9

$O(f)$ = mængden af funktioner, der vokser af mindre orden eller af samme orden som f.

(1) Vis: For alle reelle tal a, b er
$$an + b \in O(n)$$

Bevis:
$$\frac{an + b}{n} = a + \frac{1}{n} b \to a \text{ for } n \to \infty$$

QED

(2) Vis: For alle reelle a, b, c er
$$an^2 + bn + c \in O(n^2)$$

Bevis:
$$\frac{an^2 + bn + c}{n^2} = a + \frac{1}{n} b + \frac{1}{n^2} c \to a \text{ for } n \to \infty$$

QED

I&R Opg. 2.12

f er defineret ved

a) $f(1) = k_1$

b) For $n > 1$ er $f(n) = f(n-1) + k_2 n$

$k_1, k_2 \in R_+$.

Vis: $f \in O(n^2)$

Bevis:

$k_2 n$ er $O(n)$

For at beregne $f(n)$ skal der foretages n kald af funktionen. Dette giver ialt kompleksiteten

$$O(\underbrace{n + (n-1) + \cdots + 1}_{\text{Differensrække}}) = O\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = O(n^2)$$

I&R Opg. 2.13

Overvej kompleksiteten af division efter skolemetoden ($2n$-cifrede tal divideret med n-cifrede)

Besvarelse: "Skolemetoden" for division af det $2n$-cifrede tal p med det n-cifrede tal q består af følgende trin:

1) Initialiser ved at sætte r (resten) lig med de første n (eller $n+1$) cifre i p. Sæt f lig med en tom liste af cifre.

2) Find det største tal m blandt $0, 1, \ldots, 9$ så at $mq \le r$.

3) Udvid f med m.

4) Erstat r med $r - mq$.

5) Udvid r med det (eller de) næste cifre af p.

6) Gentag fra punkt 2, så længe der er cifre tilbage i p.

7) Svar: Kvotienten f er heltalsdelen af $\frac{p}{q}$ og r er resten.

I & R Opg. 2.13 (fortsat)

<u>Eksempel</u>: $p = 456123$ $q = 789$, $n=$

(A)

$$
\begin{array}{r|l|l}
789 & 456123 & 578 \\
 & \underline{3945} & \\
 & 6162 & \\
 & \underline{5523} & \\
 & 6393 & \\
 & \underline{6312} & \\
 & 81 &
\end{array}
$$

$$p = \underbrace{578}_{f} \cdot q + \underbrace{81}_{r}$$

(B)

$r := 4561$

$m := 5$

$f := 5$

$r := r - mq = 4561 - 5 \cdot 789 = 616$

$r := 6162$

$m := 7$

$f := 57$

$r := r - mq = 6162 - 7 \cdot 789 = 639$

$r := 6393$

$m := 8$

$f := 578$

$r := r - mq = 6393 - 8 \cdot 789 = 81$

I&R Opg. 2.13 (fortsat)

Det ses, at der skal foretages højst $2n - n = n$ multiplikationer mellem et 1-cifret tal (m) og et n-cifret tal (q), samt højst n subtraktioner mellem 2 n-cifrede tal – begge dele giver en kompleksitet på $O(n^2)$.

Nedflytning etc. er marginale.

Resultat: Algoritmen $O(n^2)$.

I & R Opg. 2.16

g er defineret ved

a) $g(1) = k_1$

b) For $n > 1$ er $g(n) = 3g(n-1) + k_2 2^n$

$k_1, k_2 \in R_+$

Vis: $g(n) \leq \max(k_1, 2k_2)\,(3^n - 2^n)$ (*)

Induktionsbevis:

$g(1) = k_1$ $\max(k_1, 2k_2) \cdot (3^n - 2^n) = \max(k_1, 2k_2)$

$\geq k_1$ for $n = 1$

Dvs. (*) gælder for $n = 1$.

Antag: $g(n-1) \leq \max(k_1, 2k_2)\,(3^{n-1} - 2^{n-1})$

For $k_1 \geq 2k_2$ fås

$$g(n-1) \leq k_1 (3^{n-1} - 2^{n-1})$$

$$g(n) = 3g(n-1) + k_2 2^n \leq 3k_1(3^{n-1} - 2^{n-1}) + k_2 2^n$$

$$= k_1 3^n - (3k_1 - 2k_2)\,2^{n-1}$$

$$\leq k_1 3^n - 2k_1 \cdot 2^{n-1} = k_1 (3^n - 2^n)$$ eftersom

$$3k_1 - 2k_2 \geq 2k_1 \iff k_1 \geq 2k_2$$ ok

For $k_1 \leq 2k_2$ fås

$$g(n-1) \leq 2k_2 (3^{n-1} - 2^{n-1})$$

$$g(n) = 3g(n-1) + k_2 2^n \leq 3 \cdot 2 \cdot k_2 (3^{n-1} - 2^{n-1}) + k_2 \cdot 2^n$$

$$= 2k_2 \cdot 3^n - 2k_2 \cdot 2^n = 2k_2 (3^n - 2^n)$$

Hermed er (*) bevist.

I&R Opg. 2.16 (fortsat)

Vis: $g(n) \in O(3^n)$

Off $g(n) \leq \max(k_1, 2k_2)\ (3^n - 2^n)$

så for n stor

$$g(n) \leq K \cdot 3^n,$$

dvs. $g \in O(3^n)$

I & R   Opgave til 3. mm

Opgave: Bevis ved induktion, at alle heltal større end eller lig med 2 kan skrives som et produkt af primtal.

Løsning:

Eftersom 2 selv er et primtal er ovenstående udsagn korrekt for $n = 2$.

Antag: Alle tal mindre end eller lig med n kan skrives som et produkt af primtal. Enten er $n+1$ selv et primtal, eller også findes et tal p, $1 < p < n+1$, som går op i $n+1$, dvs. $n+1 = p \cdot q$, hvor også $1 < q < n+1$. Af induktionsantagelsen følger, at p og q kan skrives som et produkt af primtal, dvs. $n+1$ bliver et produkt af primtal.

QED